SESSION 2015

SECOND CONCOURS

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PHYSIQUE - MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices de poche à alimentation autonome, sans imprimante et sans document d'accompagnement est autorisé.
Une seule calculatrice à la fois est admise sur la table.
Aucun échange n'est permis entre les candidats.

Si vous repérez une erreur dans l'énoncé, le signaler dans votre copie.

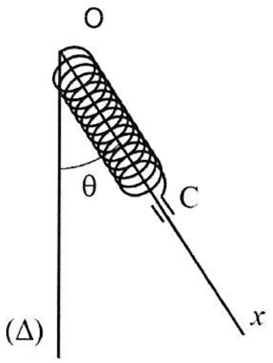
Les exercices sont totalement indépendants.

Exercice 1 : Ressorts

On dispose d'un ressort à spires non jointives de longueur au repos ℓ_0 et de raideur k. On négligera la masse du ressort dans tout le problème proposé.

On enfile ce ressort sur une tige Ox soudée en O et à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale ascendante d'un angle θ ($\theta < 90$ °).

Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre, on accroche un corps C de masse m coulissant sans frottement sur Ox.



a. Le système est au repos

Q1 Préciser les différentes forces appliquées à C (assimilé à un point matériel). Préciser sens et orientation sur un schéma.

Q2 Exprimer l'allongement $\Delta\ell_1$ du ressort, l'intensité de la réaction $\overrightarrow{R_1}$ exercée par la tige sur C, ainsi que l'intensité de la tension $\overrightarrow{T_1}$ du ressort en fonction de m, g et θ.

Application numérique :

$\ell_0 = 15$ cm, $k = 20$ N·m^{-1}, $\theta = 33$ ° ; $m = 150$ g ; $g = 9{,}81$ m·s^{-2} (accélération de la pesanteur).

Q3 Si θ varie d'une quantité $\Delta\theta \ll \theta$, la longueur d'équilibre $\Delta\ell_1$ varie d'une quantité ξ. Les deux variations relatives sont reliées par une relation du type :

$$\frac{\xi}{\Delta\ell_1} = f\frac{\Delta\theta}{\theta}$$

Exprimer littéralement la fonction f en fonction des paramètres du problème. Faire le développement au premier ordre de la fonction f quand θ tend vers 0.

b. L'ensemble tourne autour de (Δ) à la vitesse angulaire constante ω, le ressort n'oscille pas et a une longueur constante ℓ_2.

Q4 Préciser la trajectoire décrite par C.

Q5 Exprimer la longueur ℓ_2 du ressort. La calculer pour $\omega = 10$ rad·s^{-1} en reprenant les mêmes valeurs numériques que pour la question **Q2**.

Q6 Exprimer littéralement l'intensité de la force $\overrightarrow{R_2}$ exercée par la tige sur C en fonction de m, g, θ, ω et ℓ_2.

Calculer la valeur de $R_2 = \left\|\overrightarrow{R_2}\right\|$ pour $\omega = 10$ rad·s^{-1}.

Q7 Montrer que, pour une valeur particulière ω_c que l'on calculera, la réaction $\vec{R}$ a une intensité nulle. Faire l'application numérique avec les valeurs précédentes de ℓ_0, k, θ ; m ; g.

c. L'ensemble est immobile, le ressort peut osciller.

On repart de la situation de la question Q1, où le ressort était à l'équilibre.

Q8 Exprimer l'équation différentielle du mouvement du ressort dans le référentiel lié à la tige sous la forme d'une équation différentielle :

$$\frac{d^2\Delta\ell_1}{dt^2} + A\frac{d\Delta\ell_1}{dt} + B = 0 \qquad (1)$$

Que valent A et B dans le cas présent ?

Q9 Dans le référentiel lié à la tige, on lâche le corps C sans vitesse initiale d'une position $\Delta\ell_1(0)$. Quelle est l'équation horaire du mouvement du corps C ?

Q10 Une force de frottement fluide s'exerce maintenant sur le corps C. Cette force a une expression :

$$\vec{f} = -\alpha\frac{d\Delta\ell_1}{dt}\overrightarrow{u_x}$$

Où α est une constante positive. Quelle serait l'unité de α dans le système international ? Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'exprime aussi sous une forme (1). Identifier les nouvelles valeurs des constante *A* et *B*.

Q11 Quelle est la forme générale des solutions de cette équation différentielle ?

Exercice 2 : Radioactivité

Le potassium $^{40}_{19}\mathrm{K}$ est radiactif et se désintègre en donnant de $^{40}_{18}\mathrm{Ar}$.

Q12 Ecrire l'équation de cette réaction nucléaire. De quel type de désintégration s'agit-il ?

Q13 **a.** Exprimer en fonction du temps, le nombre n_K d'atomes de potassium 40 présents à une date *t* dans un échantillon ne contenant initialement que du potassium (Nombre d'atomes n_0.)

b. Représenter sur un même graphique les fonctions $n_K = f(t)$ et $n_{\mathrm{Ar}} = g(t)$.

Q14 Certaines roches volcaniques comme l'obsidienne contiennent du potassium dont une partie est du potassium 40. Au moment de sa formation, cette roche ne contient pas d'argon. Un géologue analyse un échantillon d'obsidienne et constate que les atomes d'argon 40 y sont deux fois moins nombreuses que les atomes de potassium 40. Quel est l'âge de cette roche ?

Donnée numérique : demi-vie du potassium 40 : 10^9 ans.

Exercice 3 : Optique

Un système optique est constitué de deux lentilles minces dont l'une L_1 est convergente. Sa vergence est $C_1 = 10\ \delta$.

L'autre L_2 est une lentille divergente de vergence $C_2 = -10\ \delta$.

Avec des deux lentilles, on veut observer le haut d'une tour de 50 m qui est située à 3,5 km du lieu d'observation.

Q15 Dessiner le cheminement des rayons lumineux issus de la tour dans la lentille L_1.

Q16 Déterminer la position, la nature et la taille de l'image de la tour donnée par la lentille convergente.

Q17 L'image obtenue joue le rôle d'objet pour la deuxième lentille qui doit en donner une image virtuelle située à l'infini. Comment doit-on situer la seconde lentille par rapport à la première, leurs axes optiques étant confondus ?

Q18 Représenter le cheminement optique des rayons lumineux issus de la tour dans le système optique constitué par les deux lentilles.

Q19 Sous quel angle apparent α est vue la tour lorsque l'observateur la regarde directement ? Sous quel angle apparent α' l'image définitive est-elle vue ?

Le rapport de α et de α' est appelé grossissement de l'appareil. Le calculer et le comparer au rapport des distances focales des deux lentilles.

Exercice 4 : ondes

Le long d'une corde très longue de masse linéique μ, tendue horizontalement c avec une tension T, se propage sans amortissement une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω et de célérité c constante.

La position d'un point M de la corde est repérée par l'abscisse de ce point sur un axe $x'x$ parallèle à la corde et orientée dans le sens de propagation de l'onde. L'origine des temps est choisie de telle sorte qu'au point M_1 d'abscisse x_1, l'élongation exprimée en centimètre soit : $y_1 = 2\cos(\omega t)$.

Q20 Quelle est la dimension de T ? de μ ? En déduire qu'il est possible de trouver une expression de c de la forme :

$$c = AT^{\alpha}\mu^{\beta}$$

Où A est une constante sans dimension et α et β deux nombres que l'on déterminera.

Q21 Déterminer en fonction de ω et de c, la fréquence N et la longueur d'onde λ de la vibration, ainsi que la valeur k du vecteur d'onde associé.

Application numérique : On donne $\omega = 100$ rad·s^{-1}, $c = 20$ m·s^{-1} ; calculer les valeurs de N, λ et k.

Q22 Après un passage en M_1, l'onde arrive en un point M_2 de la corde d'abscisse x_2 ($x_2 > x_1$).Soit y_2 l'élongation de M_2.

Donner l'expression de y_2 en fonction de ω, t, x_2, x_1 et k.

Q23 On considère maintenant deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation et propagation que l'onde précédente et se propageant en sens opposés le long de la corde, la tension de celle-ci ayant été modifiée. On étudie le phénomène résultant de la superposition de ces ondes. On observe alors que les points M_1 et M_2 précédents sont deux ventres de vibration consécutifs.

a. En déduire le déphasage du mouvement de M_2 par rapport à celui de M_1.
b. Déterminer la nouvelle célérité c' des ondes. On donne M_1M_2=20 cm.

Exercice 5 : Interaction gravitationnelle

Dans cet exercice, le mouvement est rapporté à un référentiel géocentrique considéré comme galiléen. La Terre est supposée sphérique, de rayon R, de masse M. La répartition des masses est à symétrie sphérique. Le champ de gravitation terrestre à l'altitude h a pour expression :

$$G = K\frac{M}{(R+h)^2}$$

K étant la constant de gravitation universelle. On donne la valeur de la constante de gravitation au niveau du sol $G_0 = 9{,}80$ m·s^{-2}, le rayon de la terre $R = 6370$ km.

Q24 Calculer la fréquence de rotation de la terre sur elle-même en rad·s^{-1}. Calculer la masse volumique moyenne de la terre.

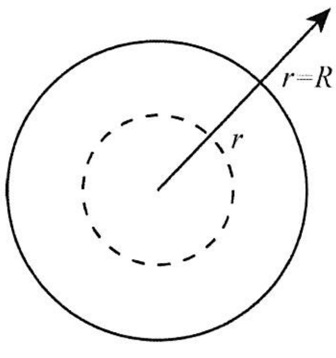


Figure 1: Terre.

Q25 En fait la masse volumique de la terre n'est pas constante mais dépend de la profondeur. Si r est la distance mesurée par rapport au centre de la terre (cf. figure), elle s'écrit :

$$\rho(r) = \rho_0 \exp\left(a\frac{(R-r)}{R}\right)$$

Où a est une constante.

a. Calculer l'expression de la masse dM comprise entre deux calottes sphériques de rayons r et r+dr (dr étant petit devant r).
b. En déduire la masse de la Terre M en fonction de ρ_0, a et R.

Q25 Exprimer l'expression de l'intensité du champ de gravitation G à l'altitude h en fonction de h, R et G_0.

Q26 Montrer que pour $h \ll R$, il est possible d'exprimer *sous forme approchée* $G(h)$ sous forme d'un polynôme en h/R dont on calculera les deux premiers termes. Par la suite on ne sera plus dans le cas $h \ll R$.

Q27 Soit un satellite assimilable à un point matériel, ayant une orbite circulaire dont le centre est confondu à celui de la Terre à une altitude h. Exprimer l'expression de la vitesse du satellite sur sa trajectoire. En déduire l'expression de sa période T en fonction de h, R et G_0.

Exercice 6 : Electrostatique

On rappelle que le potentiel électrostatique créé par une charge q a une distance r est donné par la relation :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide. Soient deux charges $q_A = 2\ \mu C$ et $q_B = -2\ \mu C$ sur un axe Ox. La charge q_A est placée en $x = 0$ et la charge q_B en $x = d$ (cf. figure ci-dessous).

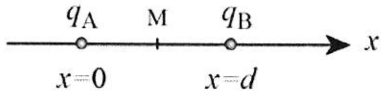


Figure 2 : Electrostatique.

Q28 Exprimer le potentiel électrostatique en fonction de x. On pourra éventuellement distinguer les cas $x < 0$, $0 < x < d$ et $x > d$.

Q29 Calculer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E(x)}$ défini par :

$$\overrightarrow{E(x)} = -\frac{dV}{dx}\vec{\imath}$$

On pourra éventuellement distinguer les cas $x < 0$, $0 < x < d$ et $x > d$.

Q30 Montrer qu'il existe un ou plusieurs points de l'espace ou l'intensité du champ électrique est nulle. Calculer leur(s) position(s) en fonction de ε_0.

Q31 Montrer qu'il existe un ou plusieurs points de l'espace ou l'intensité du potentiel électrostatique est nulle. Calculer leur(s) position(s) en fonction de ε_0.